Varianta 015

Subiectul I

a) $AB = 7\sqrt{2}$;
b) $\cos^2 211 + \sin^2 211 = 1$;
c) Aria cerută este $\frac{3\sqrt{3}}{2}$;
d) Dacă $z = -4 + 3i$ atunci $\overline{z} = -4 - 3i$;
e) Obțin $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$;
f) $\sqrt{52}$;
Subiectul II:
1.
a) $\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6$;
b) Probabilitatea cerută este $\frac{3}{5}$;
c) $4^x - 64 = 0 \Leftrightarrow 4^x = 4^3 \Leftrightarrow x = 3$;
d) Din definiția logaritmului $x = 8^{-2} = \frac{1}{64}$;
e) $C_5^1 - C_5^4 + C_5^5 = C_5^1 - C_5^1 + 1 = 1$;

2.
a) $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$;
b) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3) = -\frac{3}{3^4} = -\frac{1}{27}$;
c) $f'(x) = -\frac{3}{x^4} < 0, (\forall) x \in (0,\infty) \Rightarrow f$ strict descrescătoare pe $(0,\infty)$;
d) $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (4 - x^{-3})dx = \left(4x + \frac{x^{-2}}{-2}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{37}{8}$;
e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$
Subiectul III

a) $0 = 0 + 0 \cdot \omega$ si $1 = 0 + 1 \cdot \omega$ deci $0 \in M, 1 \in M$.
b) $\omega^2 = (2 - \sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 8 - 4\sqrt{3} - 1 = 4(2 - \sqrt{3}) - 1 = 4\omega - 1$
c) Fie $z, x \in M \Rightarrow (\exists) a, a', b, b' \in Z$ cu $z = a + b\omega$ si $y = a' + b'\omega$

Am $z+y=(a+a')+(b+b')\omega\in M$ si

$z\cdot y=a\cdot a'+(a\cdot b'+a'\cdot b)\omega+b\cdot b'\omega^2=a\cdot a'+(a\cdot b'+a'\cdot b)\omega+b\cdot b'(4\omega-1)=(a\cdot a'-b\cdot b')+$
$(a\cdot b'+a'\cdot b+4b'b)\omega\in M$.

d) $(a+b\omega)(a+b\overline{\omega})=a^2+b^2\omega\overline{\omega}+ab(\omega+\overline{\omega})=a^2+b^2+4ab\in \mathbf{Z}$ caci $a,b\in \mathbf{Z}$

e) $\omega=0+1\cdot\omega\in M$, $\overline{\omega}=4-\omega\in M$ si cum $\omega\overline{\omega}=1$ rezultă $\omega\in G$.

f) Deoarece $\omega\in G$ rezultă $\omega\cdot\omega=\omega^2\in G$ si prin inducție $\omega^n\in G(\forall)n\in N^*$. Atunci $\{\omega,\omega^2,...,\omega^{2006}\}\subset G$ si $\omega^i\neq\omega^j\ (\forall)i\neq j$. Deci G conține cel puțin 2006 elemente.

g) $\omega^{2006}=(2-\sqrt{3})^{2006}=C_{2006}^{0}2^{2006}+C_{2006}^{2}2^{2004}\cdot 3+...+C_{2006}^{2006}3^{1003}-\sqrt{3}(C_{2006}^{1}2^{2005}+$
$C_{2006}^{3}2^{2003}\cdot 3+...+C_{2006}^{2005}2\cdot 3^{1002})=a-b\sqrt{3}$

cu $b\neq 0$ şi a,b$\in$ **Q**; deci $\omega^{2006}\notin$ **Q**.

Subiectul IV:

a) $f'(x)=4^x\ln 4$;

b) Deoarece $a^x>0,(\forall)a>0,a\neq 1$ şi $(\forall)x\in \mathbf{R}$ obțin $f(x)=5+4^x>0,(\forall)x\in \mathbf{R},$ căci si $\ln 4>0$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=5\Rightarrow y=5$ asimptotă orizontală către $-\infty$

d) $\int_0^1 f(x)dx=\left(5x+\frac{4^x}{\ln 4}\right)\Bigg|_0^1=5+\frac{4}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 4}=5+\frac{3}{\ln 4}$;

e) Deoarece $u(t)=t^2+t+1$ este funcție de gradul al II-lea cu $\Delta=-3<0$ ea are semnul coeficientului lui t^2 , adică $u(t)>0,(\forall)t\in \mathbf{R}$. Analog $t^2-t+1>0\ (\forall)t\in \mathbf{R}$;

f) Am $\frac{1}{2}\left[(f'(x))^2+f'(x)+1\right]-\frac{1}{2}\left[(f'(x))^2-f'(x)+1\right]=\frac{1}{2}f'(x)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}f'(x)-\frac{1}{2}=f'(x)$

g) Fie $g,h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\quad g(x)=5+2\cdot 4^x, h(x)=4^x$.

Am $g'(x)=2\cdot 4^x\ln 4>0, h'(x)=4^x\ln 4>0$, adică *g, h* sunt strict crescătoare şi evident $f(x)=g(x)-h(x),(\forall)x\in \mathbf{R}$.